

9 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Пример функции неинтегрируемой по Риману, но интегрируемой по Лебегу, и даже при изменении на множестве нуль.

II] $f(x)$ — орг. ф-ция на $[a, b]$ и интегр. по Риману. Тогда $f(x)$ интегр. по Лебегу, и $(L) \int_{[a, b]} f(x) d\mu = R \int_a^b f(x) dx$

▲ $x_k = a + \frac{(b-a)}{2^n} k, k=0, 1, \dots, 2^n; x_0 = a, x_{2^n} = b$. Положим

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1})} f(x), m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1})} f(x). S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} M_k \frac{(b-a)}{2^n},$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k \frac{(b-a)}{2^n}. \text{ П.к. } f \text{ интегрируема по Риману, то}$$

$$S_n - s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = R \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Положим } \bar{f}_n = M_k \text{ на } [x_k, x_{k+1}), \underline{f}_n = m_k \text{ на } [x_k, x_{k+1}).$$

$$\int_{[a, b]} \bar{f}_n dx = S_n; \int_{[a, b]} \underline{f}_n dx = s_n. \bar{f}_n \geq \bar{f}_{n+1}, \underline{f}_n \leq \underline{f}_{n+1}$$

$$\Rightarrow \int \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(x) = \int \underline{f}(x), \int \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) = \int \bar{f}(x). \text{ Поокруглим,}$$

$$\underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \bar{f}_n(x) \Rightarrow \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$$

$$\int_{[a, b]} \bar{f}_n(x) d\mu \geq c, \int_{[a, b]} \underline{f}_n(x) d\mu \leq c \Rightarrow \text{по т. Леви } \bar{f}, \underline{f} \text{ инт.}$$

$$\text{и } \lim S_n = \lim \int_{[a, b]} \bar{f}_n(x) d\mu; \lim s_n = \lim \int_{[a, b]} \underline{f}_n(x) d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{[a, b]} \bar{f}(x) d\mu = \int_{[a, b]} \underline{f}(x) d\mu \Rightarrow \int_{[a, b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{f}(x) \stackrel{n.b.}{=} \underline{f}(x) \Rightarrow f(x) \stackrel{n.b.}{=} \bar{f}(x) \Rightarrow f(x) \text{ инт. по Лебегу,}$$

$$\text{и } (L) \int_{[a, b]} f(x) d\mu = \int_{[a, b]} \bar{f} d\mu = \int_{[a, b]} \underline{f} d\mu = R \int_a^b f(x) dx. \text{ Ч.Т.Д. } \blacksquare$$

II] $f(x)$ орг., тогда $f(x)$ интегр. на $[a, b] \Leftrightarrow$ почти всюду некр. (критерий инт-ти по Риману)

$E = \{ f(x) \text{ не кепр } f, \mu(E) = 0 \}$

1) $f(x)$ интегр. по Риману. $\tilde{E} = \{ f(x) \neq \bar{f}(x) \}$, $\mu(\tilde{E}) = 0$
(см. пред теорему). Полагая $E = \tilde{E} \cup \left\{ a + \frac{k}{2^n} (b-a) \mid k=0, \dots, 2^n-1, n=1, 2, \dots \right\}$
Итак, что $\mu(E) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \setminus E$ т.е., что $f(x)$ кепр-на

$\forall x$. x -всегда внутренняя точка разбиения, и $f(x) = \bar{f}(x) \Rightarrow$
 $\lim \bar{f}_n(x) = \lim \underline{f}_n(x) \quad M_k^n - m_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists K:$

$M_k^n - m_k^n < \varepsilon, (x-\delta, x+\delta) \subset [x_k^n, x_{k+1}^n) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
 $\forall x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$

2) $f(x)$ кепр. на $[a, b] \setminus E$, $\mu(E) = 0$. $S_n = (L) \int_{[a, b]} \bar{f}_n(x) d\mu$

$s_n = (L) \int_{[a, b]} \underline{f}_n(x) d\mu$ т.е., что их разность будет стрем-

литься к нулю. (на самом деле, что $\bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) \rightarrow 0$ (*)

$\forall x \in [a, b] \setminus E$. Отметим, что $\bar{f}_n \geq \bar{f}_{n+1}, \underline{f}_n \leq \underline{f}_{n+1}$

$\Rightarrow \bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) \geq \bar{f}_{n+1}(x) - \underline{f}_{n+1}(x), \bar{f}_1(x) - \underline{f}_1(x) \geq$

$\geq \bar{f}_n - \underline{f}_n \Rightarrow (L) \int_{[a, b]} (\bar{f}_1 - \underline{f}_1) d\mu \geq \int_{[a, b]} (\bar{f}_n - \underline{f}_n) d\mu$. По

т. леммы, $\int_{[a, b]} (\bar{f}_n - \underline{f}_n) d\mu \rightarrow 0 \Rightarrow S_n - s_n \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ интегрируема по Риману. Вспомогат. г-тв (*)

т.е. (*) для $\forall x \in [a, b] \setminus \tilde{E}, \tilde{E} = E \cup \left\{ a + \frac{k(b-a)}{2^n} \mid k=0, \dots, 2^n-1, n=1, 2, \dots \right\}$

$f(x)$ кепр в $x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, т.е. $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

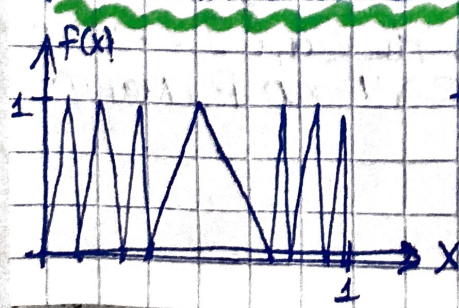
$\forall x' \in (x-\delta, x+\delta)$. Для определенности, $x \in [x_k^n, x_{k+1}^n) \subset$

$\subset (x-\delta, x+\delta)$ равно или левее $\Rightarrow M_k^n - m_k^n < 2\varepsilon$

(либо $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x) - f(x')| + |f(x) - f(x'')|$

$< 2\varepsilon \Rightarrow M_k^n - m_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. $\bar{f}_n(x) - \underline{f}_n(x) \rightarrow 0$ ■

Пример (ф-ция не интегр. по Риману даже при изменении на мн-ве 0)



"Требенка Кантора": $0 \leq f(x) \leq 1, \mu(K) = 0$

f не явл-ся кепр. $\forall x \in K$;

$x: f(x) = 0, x \in K$; $\forall$ интервала, $\forall \delta: |x-y| < \delta$

$\exists$ центр: $f(y) = 1 \Rightarrow$ не инт. по Риману, но инт.

по Лебегу, т.к. огр. и изм.